(5) Exemples de distributions

(1) Mesures de Radon

<u>Définition</u> : Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0$$

<u>Théorème</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ positive, alors T est d'ordre 0.

<u>Dém</u> : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, soit $K = \operatorname{supp} \varphi$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $\psi \equiv 1$ sur K.

Alors $\forall x \in \Omega$, $\varphi(x) \leq \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \, \psi(x)$

et de même $-\sup_{y \in K} |\varphi(y)| \, \psi(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in \Omega$.

Donc $|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \underbrace{\langle T, \psi \rangle}_{C}$.

D'où le résultat. ☒

<u>DÉFINITION</u> : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K compact de Ω. On note $\mathcal{M}_b(K)$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $C(K)$

(fonctions continues à support dans K) et $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $C_c(\Omega)$: $T \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ est dite une mesure de Radon. — pour la topologie limite inductive.

Théorème (Riesz – Radon – Markov ~ 1913).
Soit μ une mesure borélienne localement finie sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, alors on définit une mesure de Radon positive sur $C_c(\Omega)$ par

$$\forall \varphi \in C_c(\Omega), \langle T_\mu, \varphi \rangle := \int \varphi \, d\mu.$$

A toute mesure de Radon positive T on peut associer une unique mesure borélienne μ telle que $T = T_\mu$.

Théorème : Si T est une distribution positive sur Ω, alors T est une mesure de Radon positive.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ positive.

Soit $g \in C_c(\Omega)$, soit K son support, il existe $(g_n) \in \mathcal{D}(K)$ telle que $g_n \to g$

dans $C(K)$; alors la suite $(\langle T, g_n\rangle)$ est une suite de Cauchy, et on définit

$$\langle \overline{T}, g\rangle := \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle T, g_n\rangle}_{}. \quad \text{car } T \text{ est d'ordre } 0$$

Alors $\overline{T}$ est une mesure de Radon positive.

Soit S une mesure de Radon positive qui coïncide avec T sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors montrons que $S = \overline{T}$. On sait $S = \overline{T}$ sur $\mathcal{D}(K)$ puisque $S = \overline{T} = T$ sur $\mathcal{D}(K)$, pour n'importe quel compact K de Ω,

On conclut par densité de $\mathcal{D}(K_j)$ dans $C_c(\Omega)$ en choisissant K_j une suite exhaustive de compacts.

(2) Mesures de surface :

- Si $x \in \mathbb{R}^d$, on écrira $x = (x_1, .., x_d)$ et $x' := (x_1, .., x_{d-1})$.

- Un <u>graphe</u> de dimension $d-1$ et de classe C^1 est la donnée d'une base $e := (e_1, .., e_d)$, d'un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^{d-1}$, et d'une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^{d-1}; \mathbb{R})$ tels que $\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^{d-1} x_j e_j + f(x') e_d, x' \in \Omega' \right\}$.

Rq : Si Γ est donné par (e, Ω', f) soit $a \in \Gamma$ et H l'hyperplan tangent à Γ en a. Soit $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_d)$ tel que $\bar{e}_d$ n'est pas parallèle à H. Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^d$, il existe $\bar{\Omega}'$ voisinage de $\bar{a}'$ (en notant $a = \sum_{j=1}^{d} \bar{a}_j \bar{e}_j$) dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et une application φ dans $C^1(\bar{\Omega}'; \mathbb{R})$ telles que $\Gamma \cap V$ soit un graphe de présentation $(\bar{e}, \bar{\Omega}, \varphi)$.

- Une <u>hypersurface</u> Σ (de classe C^1) de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ tel que $\forall a \in \Sigma$, il existe ω voisinage de a dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\Sigma \cap \omega$ soit un graphe. On définit l'élément de surface sur Σ en $(x', f(x'))$ par $d\sigma := \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}\, dx'$.

On définit la forme linéaire suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle := \int_\Sigma \varphi \, d\sigma$$

C'est une mesure de Radon positive,

appelée mesure de surface. On la notera σ.

- Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit ouvert à bord de classe C^1 (ou C^r, $r \geq 1$) si sa frontière $\partial\Omega$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1 (ou C^r) et localement Ω soit du même coté de sa frontière ; pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un ouvert ω contenant x_0 et ρ une fonction de classe C^1 (ou C^r) telle que :

  - $\nabla\rho$ ne s'annule pas dans ω
  - $\partial\Omega \cap \omega = \{x \in \omega \,/\, \rho(x) = 0\}$
  - $\Omega \cap \omega = \{x \in \omega \,/\, \rho(x) < 0\}$.

- Si $y \in \partial\Omega$, on définit la normale unitaire en y pointant vers l'extérieur de Ω par le vecteur ;

$$\nu(y) := \frac{\nabla\rho(y)}{|\nabla\rho(y)|}.$$

③ Formule des sauts :

<u>Théorème</u> (Green 1830) : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe C^1. Soit V un champ de vecteurs <u>de</u> classe C^1 à support compact dans $\overline{\Omega}$. Alors

$$(1) \quad \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div} V}_{= \sum_j \partial_j V^j} \, dx = \int_{\partial\Omega} V \cdot \nu \, d\sigma$$

Ce théorème peut se reformuler de la manière suivante.

<u>Théorème</u> Soit Ω de classe C^2. Alors pour tout $j \in \{1, .., d\}$ on a

$$(2) \quad \partial_j \mathbb{1}_\Omega = -\nu_j \sigma.$$

$\nu \in C^\infty$ (hyp)

fT est bien défini si $f \in C^m$ quand T est d'ordre m

<u>Remarque</u> : (2) $\Rightarrow$ (1) :

Soit V un champ de vecteurs dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$

$$\langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega , V_j \rangle = -\langle \nu_j \sigma, V_j \rangle$$

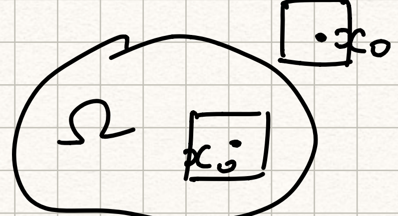
$$\Leftrightarrow \; -\int_\Omega \partial_j V_j \, dx = -\int \nu_j V_j \, d\sigma$$

et il suffit de sommer sur j.

Démonstration du théorème (de (2))

Lemme : Si Ω est un ouvert à bord de classe C^1 alors $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\partial_j \mathbb{1}_\Omega$ est une distribution dont le support est inclus dans $\partial\Omega$.

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$,



Il existe $\delta > 0$ tel que

$$B(x_0, \delta) := \left\{ x \in \Omega \,/\, \sup_{1 \leq j \leq d} |x_{0j} - x_j| < \delta \right\}$$

ne rencontre pas $\partial\Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, \delta))$, montrons que $\langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = 0$.

On a $\langle \partial_j \mathbb{1}_\Omega, \varphi \rangle = - \int_\Omega \partial_j \varphi \, dx$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ alors cette intégrale est nulle. Si $x_0 \in \Omega$, alors par Fubini, on écrit

$$\int \partial_j \varphi \, dx = \int_{x_1} \int_{x_2} \cdots \underbrace{\left(\int_{x_{0j} - \delta}^{x_{0j} + \delta} \partial_j \varphi \, dx_j \right)}_{= 0} \cdots dx_1 \cdot$$

Lemme : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^2, alors on a :

$$\sigma = -\nu \cdot \nabla \mathbb{1}_\Omega .$$

Démonstration : On se place dans le cas $d=2$.

On suppose que $\Omega = \{ x \,/\, x_2 - f(x_1) < 0 \}$

($\partial\Omega$ est défini par $\rho(x) = 0$ où $\rho(x) = x_2 - f(x_1)$)

Alors $\nabla\rho(x) = \begin{pmatrix} -f'(x_1) \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\nabla\rho|^2 = 1 + |f'(x_1)|^2$

pour $x \in \partial\Omega$

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{|\nabla\rho(x)|}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

calculons $\langle -\nu \cdot \nabla \mathbb{1}_\Omega , \varphi \rangle = I$

$$I = \int_\Omega \partial_1 (\nu_1 \varphi)\, dx + \int_\Omega \partial_2 (\nu_2 \varphi)\, dx .$$

Soit R tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-R, R]^2$

$$\int_\Omega \partial_1 (\nu_1 \varphi)\, dx = \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_1 \left(\frac{\partial_1 \rho(x)}{|\nabla\rho(x)|} \varphi(x) \right) dx_2\, dx_1$$

$$= \int_{-R}^{R} \partial_1 \left(\int_{-R}^{f(x_1)} \nu_1(x) \varphi(x)\, dx_2 \right) dx_1$$

$$(\ast\ast) \quad - \int_{-R}^{R} f'(x_1)\, \nu_1(x_1, f(x_1))\, \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 .$$

$$= 0 + \int_{-R}^{R} (f'(x_1))^2 \frac{1}{|\nabla \rho(x_1)|} \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 . (\ast)$$

$$\int_\Omega \partial_2(\nu_2 \varphi)\, dx = \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{f(x_1)} \partial_2(\nu_2\varphi)(x)\, dx_2\, dx_1$$

(x_1, x_2)

$$= \int_{-R}^{R} \nu_2(x_1, f(x_1))\, \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{1}{|\nabla \rho(x_1)|} \varphi(x_1, f(x_1))\, dx_1 . (\ast\ast)$$

$$I = (\ast) + (\ast\ast) = \int_{-R}^{R} \frac{1 + f'^2(x_1)}{\sqrt{1 + f'^2(x_1)}} \varphi(x, f(x_1))\, dx_1$$

$$= \int_{-R}^{R} \varphi(x_1, f(x_1))\, d\sigma . \quad \blacksquare$$

Rq sur $(\ast\ast\ast)$

$x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^{f(x)} g(x,y)\, dy$

$$= \underbrace{\int_0^{f(x)} \partial_x g(x,y)\, dy}_{(a)} + \underbrace{f'(x)\, g(x, f(x))}_{(b)}$$

En effet

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{f(x+\delta)} g(x+\delta, y)\,dy - \frac{1}{\delta}\int_0^{f(x)} g(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_0^{f(x)} g(x+\delta, y)\,dy - \frac{1}{\delta}\int_0^{f(x)} g(x,y)\,dy \xrightarrow[\delta\to 0]{} (a)$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{\delta}\int_{f(x)}^{f(x+\delta)} g(x+\delta, y)\,dy}$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{f(x)}^{f(x+\delta)} g(x,y)\,dy + \frac{1}{\delta}\int_{f(x)}^{f(x+\delta)} [g(x+\delta,y) - g(x,y)]\,dy$$

$$\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$$G(X) := \int_0^X g(x,y)\,dy$$

$$\frac{1}{\delta}\left[G\circ f(x+\delta) - G\circ f(x)\right]$$

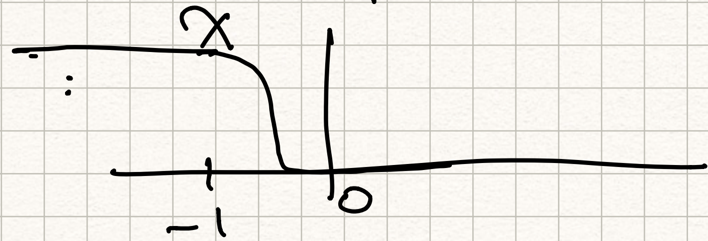
$$\longrightarrow f'(x)\, G'\circ f(x) = f'(x)\, g(x, f(x))$$

$$= (b)$$

<u>Conclusion</u> : $-\nu\cdot\nabla \mathbb{1}_\Omega = \sigma$

On veut $\partial_j \mathbb{1}_\Omega = -\nu_j \sigma$

On approxime $\mathbb{1}_\Omega$ par une fonction régulière :



Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \equiv 1$ pour $x \leq -1$

$\chi \equiv 0$ pour $x \geqslant 0$

et $\chi_R(x) := \chi(R\rho(x))$

Mq $\chi_R \longrightarrow \mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\int \chi_R \varphi(x)\,dx = \int \chi(R\rho(x))\,\varphi(x)\,dx$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$= \int_{R\rho(x)<-1} \varphi(x)\,dx \rightarrow \int_\Omega \varphi(x)\,dx$$

$$+ \underbrace{\int_{\frac{1}{R} \leq \rho(x) \leq 0} \chi(R\rho(x))\,\varphi(x)\,dx}_{\to\, 0}$$

$$\left|\left\{x \,/\, \frac{1}{R} \leq \rho(x) \leq 0\right\}\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$